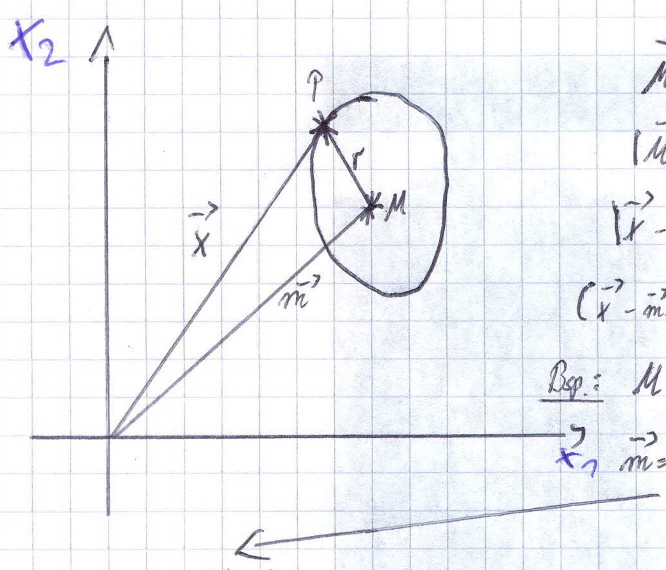
Protokoll 1. Std 26.10.09

Patrick Daniel

Analytische Geometrie Kreis und Kugel

Definition: Die ~~Kreislänge~~ Kreislinie ist die Menge aller Punkte der Ebene, die zu einem festen Punkt, dem Mittelpunkt M, den gleichen Abstand r haben.



$\overrightarrow{MP} = \vec{x} - \vec{m}$

$|\overrightarrow{MP}| = r$

$|\vec{x} - \vec{m}| = r$

$(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$

Bsp.: $M(1|2)$ $r = 3$

$\vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^2 = 9$

Man kann nun überprüfen, ob $P(1|0)$ ~~auf Ek Ek ist~~ auf dem Kreis liegt.

$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^2 = 9$

$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right]^2 = 9$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 9$

$\Leftrightarrow 0 \cdot 0 + (-2)(-2) = 9$

$\Leftrightarrow 4 = 9$ ↯

$P_1 \notin K$

$P_2(1|-1) \in K$?

$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^2 = 9$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}^2 = 9$

$9 = 9$ ✓

$P_2 \in K$

---

allg.

$P(x_1|x_2)$

$M(m_1|m_2)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}\right]^2 = r^2$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - m_1 \\ x_2 - m_2 \end{pmatrix}^2 = r^2$

$\Leftrightarrow (x_1 - m_1) \cdot (x_1 - m_1) + (x_2 - m_2) \cdot (x_2 - m_2) = r$

$\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1 m_1 + x_2^2 - 2x_2 m_2 + m_2^2 = r$

<u>Bsp.:</u> $x_1^2 + x^2 - 2x_1 + 6x_2 - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{x_1^2 - 2x_1 + 1}_{} + \underbrace{x_2^2 + 6x_2 + 9}_{} - 6 - 1 - 9 = 0$ (*) „quadratische Ergänzung"

$\Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 3)^2 = 16$

$\Leftrightarrow \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right]^2 = 4^2$

$M(1|-3)$ $r = 4$

$x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 + 2x_2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{x_1^2 - 4x_1 + 4}_{} + \underbrace{x_2^2 + 2x + 1}_{} - 4 - 1 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2 = 9$

26.10.09

$P(0/0)$ $\quad k: x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 - 6x_2 - 4 = 0$

$$x_1^2 + 4x_1 + 2 + x_2^2 - 6x_2 + 3 \quad -2-3-4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1+2)^2 + (x_2-3)^2 = 9$$

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]^2 = 3^2$$

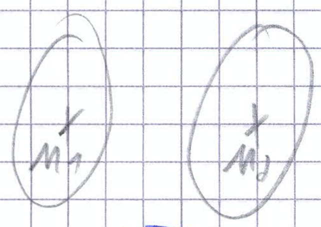
$M(-2/3)$; $\quad r = 3$

Abstand von M zu P:

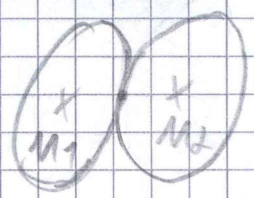
$$d(P; M) = |\overrightarrow{MP}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} = 3{,}61 > r$$

P liegt außerhalb von k.

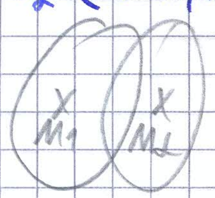
Lage von 2 Kreisen: $(M_1 \neq M_2)$:



$r_1 + r_2 < |\overline{M_1 M_2}|$



$r_1 + r_2 = |M_1 M_2|$



$r_1 + r_2 > |\overline{M_1 M_2}|$

Lars Sörsche