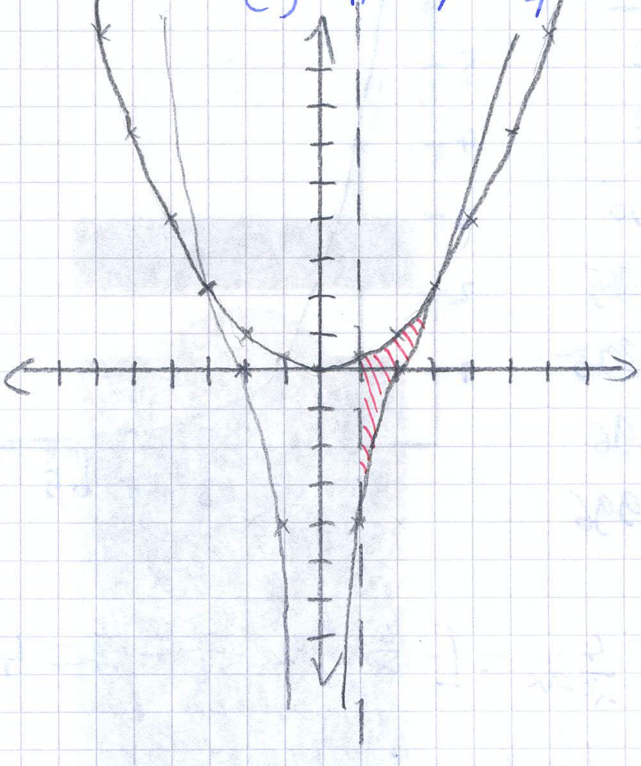
Oliver Stolz

Protokoll Mathestunde am 20.11.09

Hausaufgabe: S. 147 / Nr. 16

a) $f(x) = \frac{x^4-16}{4x^2}$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $P: y = \frac{x^2}{4}$

x	y
1	0,25
2	1
3	2,25
4	4
5	6,25
6	9



b)

$$A = \int_1^3 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4-16}{4x^2}\right) dx$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{4x^2} - \frac{16}{4x^2}\right) dx$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4} - 4x^{-2}\right) dx$$

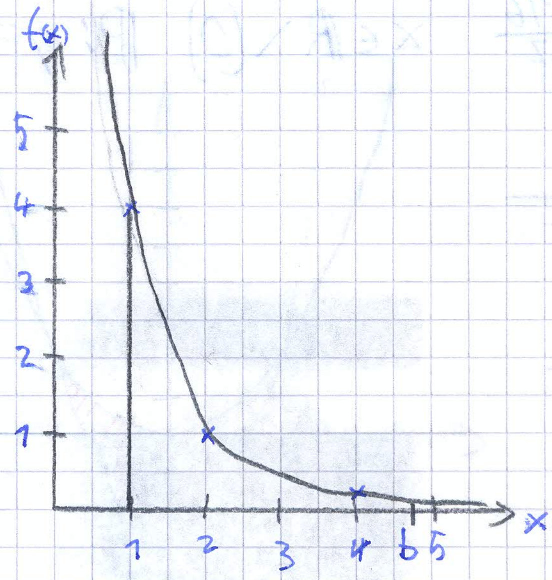
$$= \left[4x^{-1}\right]_1^3$$

$$= 2\tfrac{2}{3}$$

Uneigentliche Integrale

$f(x)=\frac{4}{x^2}$

b	A
2	2
4	3
8	3,5
16	3,75
32	3,875
100	3,96
1000	3,996



$$A=\int_1^b \frac{4}{x^2}dx=\left[-\frac{4}{x}\right]_1^b=-\frac{4}{b}-\frac{4}{1}=4-\frac{4}{b}<4$$

$$\lim_{b\to\infty} A=\lim_{b\to\infty}\left(4-\frac{4}{b}\right)=4$$

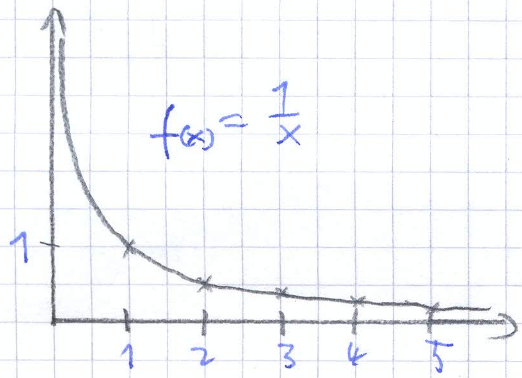
Definition 1:

Ist die Funktion f auf dem Intervall $[a;\infty)$ stetig und existiert der Grenzwert $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, so heißt dieser Grenzwert $\boxed{\text{das uneigentliche Integral von } f \text{ über } [a;\infty)}$. Entsprechend wird das uneigentliche Integral von f über $(-\infty;b]$ definiert.

$\Rightarrow$ Schreibweise $\lim_{b\to\infty}\int_a^b (f(x))dx=\int_a^\infty f(x)dx$

<u>Bsp.:</u> $\int_1^\infty 2x^{-3}dx=\lim_{b\to\infty}\left[-x^{-2}\right]_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(-b^{-2}-(-1^{-2})\right)$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b^2}+1\right)=1$$



$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx > \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \ldots$$

$$> \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \ldots$$

$$> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Hausaufgabe zum nächsten Mal: a) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

b) $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$