M13: Komplexe Zahlen 1

Leonhard Euler 1744

$$i^2 = -1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{-1} = i$$

1. a) Berechne i^n für n = 2, 3, 4, . . . , 9 und für n = 32, 33, 34, 35!
   b) Berechne i^{4n}, i^{4n+1}, i^{4n+2}, i^{4n+3}, wenn $n \in \mathbb{N}$ ist!
   c) Berechne $(-i)^{4n}$, $(-i)^{4n+1}$, $(-i)^{4n+2}$, $(-i)^{4n+3}$ für $n \in \mathbb{N}$!
   d) Was kann man über $k \in \mathbb{N}$ aussagen, wenn $i^k = i$ bzw. $i^k = -i$ ist?
2. a) Begründe: $i^{-3} = i^{-3} \cdot i^4 = i^{4-3} = i$
   b) Berechne ähnlich: i^{-9}, i^{-17}, i^{-27}, i^{-38}
3. Stelle in der Form a + bi dar:
   a) $i - \frac{1}{i}$ b) $i^2 - \frac{1}{i^3}$ c) $\left(i + \frac{1}{i}\right)^2$ d) $(i^9 - i^{14})^2$
   e) $(-i)^2 + \frac{1}{i^2}$ f) $(-2i)^3 + \frac{2}{i^3}$ g) $(-i)^{-3} + 3i^3$ h) $i^{-7} + (-i)^5$
4. Berechne:
   a) $6 \cdot 2i$ b) $6i \cdot 2i$ c) $i \cdot 2i \cdot 3i \cdot 4i \cdot 5i$
   d) $\sqrt{2}\,i\,(1 - \sqrt{2}\,i)$ e) $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1+i) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1+i)$ f) $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1-i) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1-i)$
   g) $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1+i) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1-i)$ h) $(3+4i)(2-i)$ i) $(2-3i)(3+4i)(3-4i)$
5. Berechne z^{-1} für
   a) $z = 1 + i$ b) $z = 1 - i$ c) $z = 3 + 4i$ d) $z = (1 - 4i)(3 + i)$
6. Berechne zu folgenden Zahlenpaaren z_1, z_2 die Quotienten $z_1 : z_2$ und mache die Probe!
   a) $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 2 - 5i$ b) $z_1 = 2 - 5i$, $z_2 = 3 + 4i$ c) $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 1 + 3i$ d) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$
7. Berechne $iz + \frac{1}{z}$ für
   a) $z = 1 + i$ b) $z = 2 - i$ c) $z = 3 + 2i$
8. Berechne $z + \frac{i}{z}$ für
   a) $z = -1 + i$ b) $z = 1 + 2i$ c) $z = -2 + 3i$
9. Die Divisionsaufgabe $(a + bi)\,z = (c + di)$ kann auch gelöst werden, indem man für die komplexe Unbekannte $z = x + yi$ setzt und die linke Seite der Gleichung ausmultipliziert. Die dann entstehende Gleichung kann, da Real- und Imaginärteile beider Seiten übereinstimmen müssen, in zwei Gleichungen zwischen reellen Zahlen aufgespaltet werden. Berechne auf diese Weise x und y! Wann besitzt das entstehende Gleichungssystem keine Lösung?
   Merke: *Eine* Gleichung zwischen komplexen Zahlen ist gleichwertig mit *zwei* Gleichungen zwischen reellen Zahlen.
10. Die Zahlen:
    a) $2i$ b) $3 - 4i$ c) $-3 + 4i$ d) $-21 + 20i$
    sind Quadrate von komplexen Grundzahlen x + iy. Bestimme dieselben! Ist die Lösung eindeutig?
    Anleitung: Ansatz $(x + iy)^2 = a + bi$. Bringe die linke Seite in die Form $x' + iy'$. Die dann bestehende Gleichung ist äquivalent zu 2 Gleichungen mit reellen Zahlen.
11. Folgende quadratische Gleichungen sind durch quadratische Ergänzung auf rein quadratische Gleichungen zurückzuführen und zu lösen! Man mache auch die Probe!
    a) $z^2 + 10z + 34 = 0$ b) $z^2 - 6z + 12 = 0$ e) $z^2 + (1+i)\,z + i = 0$
    c) $z^2 + 4iz - 13 = 0$ d) $i z^2 + 6z - 25i = 0$
12. In der Gleichung $z^2 + 2iz - a = 0$ bedeutet a eine von Null verschiedene reelle Zahl. Welche Bedingung muß a erfüllen, wenn die Lösungen der quadratischen Gleichung rein imaginär sein sollen und wie lauten die Lösungen dann?
13. Berechne für $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$
    a) die Summe $z_1 + z_2$ b) die Differenz $z_1 - z_2$
    c) das Produkt $z_1 \cdot z_2$ d) den Quotienten $z_1 : z_2$.
    Wie kann man die Vertauschbarkeit der Summanden bzw. der Faktoren bei Summe und Produkt unmittelbar am Ergebnis ablesen?