Komplexe Zahlen

15.02.10

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm \sqrt{-1}$$ ↯

Leonard Euler:

$$\sqrt{-1} = i \Leftrightarrow i^2 = -1$$

$$x_{1,2} = 2 \pm i$$

$$L = \{2+i;\ 2-i\}$$

Probe:

$$(2 \pm i)^2 - 4(2 \pm i) + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4 \pm 4i + i^2 - 8 - 4i + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4 \pm 4i - 1 - 8 \mp 4i + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow 0 = 0 \checkmark$$

Def:

Eine Zahl $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$ heißt komplexe Zahl; a heißt Realteil und b Imaginärteil von z.

Satz:

Mit den komplexen Zahlen rechnet man wie mit den reellen Zahlen unter Berücksichtigung von $\boxed{i^2 = -1}$

$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i$

Bsp: $(2+i) + (3-4i) = 5 - 3i$

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i$

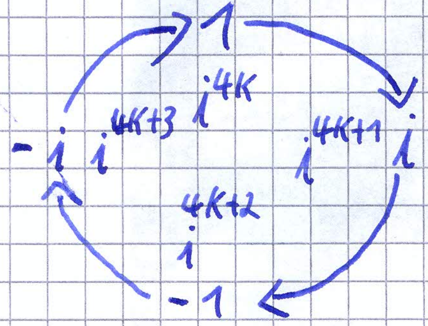
$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_1 + a_2 b_1) \cdot i$

$(1-i) \cdot (2+3i) = 2 + 3i - 2i + 3 = 5 + i$

Potenzen von i:

$i^2 = -1$; $i^3 = i^2$; $i^4 = -i \cdot i = -(-1) = 1$; $i^5 = i^4 \cdot i = i$

$i^6 = -1$; $i^7 = -i$



$\boxed{i^4 = 1}$ $\quad \underbrace{i^{-3} \cdot i^4}_{1} = i^{-3+4} = i^1 = i$

$i - \frac{1}{i} = i - \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = i - \frac{i}{-1} = i + i = 2i$

$i^2 - \frac{1}{i^3} = -1 - \frac{1 \cdot i}{i^3 \cdot i} = -1 - \frac{i}{1} = -1 - i$

Lars Dircks