M13: Komplexe Zahlen 2

Summen, Beträge

1. Stelle folgende Summen in der Zahlenebene durch eine Vektorkette dar! Beachte: Subtraktion von z kann durch Addition von − z ersetzt werden!

a) $(2 + 3\,i) + (1 + 2\,i)$ b) $(2 - 3\,i) + (3 + 5\,i)$

c) $(1 + 2\,i) + (2 + i) + (1 - i)$ d) $(1 + 2\,i) - (2 + i) - (1 + i)$

2. Zeichne in der komplexen Zahlenebene folgende Dreiecke mit den Ecken z_1, z_2 und z_3. Berechne die Längen ihrer Seiten!

a) $z_1 = 0$, $z_2 = 3\,i$, $z_3 = 4$

b) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 - i$, $z_3 = 2 + 5\,i$

c) $z_1 = 3 + 4\,i$, $z_2 = -2 - i$, $z_3 = 2 - i$

3. Man veranschauliche die für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gültige Ungleichung $|z_1 - z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$ durch eine Figur! (*Dreiecksungleichung*)

4. Man berechne die Beträge folgender Zahlen:

a) $z_1 = -3 + 4\,i$; $z_2 = 0{,}9 + 1{,}2\,i$; $z_1 + z_2$; $z_1 : z_2$

b) $z_1 = 0{,}6 + 0{,}8\,i$; $z_2 = 1{,}2 + 1{,}6\,i$; $z_1 + z_2$; $z_1 \cdot z_2$

5. *Wichtige Formeln:* Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{R}^+$ gilt:

a) $|\lambda z| = \lambda |z|$ b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

c) $|z^n| = |z|^n$ d) $|z_1 : z_2| = |z_1| : |z_2|$ $(z_2 \neq 0!)$

e) $z \cdot z^* = |z|^2$ f) $|z| = |z^*| = |-z|$

Beweise sie!

Polarformen

6. Stelle folgende Zahlen in Polarform dar!

a) 1 b) -1 c) i d) $1 + i$ e) $1 - i$

f) $3 + \sqrt{3}\,i$; g) $\sqrt{3} - i$ h) $-1 - \sqrt{3}\,i$; i) $0{,}6 - 0{,}8\,i$ k) $-7 - 3\,i$

7. Folgende Zahlen sind in die Normalform x + yi zu überführen! Handelt es sich durchwegs um Polarformen?

a) $\sqrt{2}\,E\left(\frac{\pi}{4}\right)$ b) $\sqrt{2}\,E\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ c) $\sqrt{3}\,E(\frac{4}{3}\pi)$ d) $\sqrt{3}\,E(-\frac{4}{3}\pi)$

e) $2\,E(\frac{3}{4}\pi)$ f) $2\,E(-\frac{3}{4}\pi)$ g) $3\,E(70^\circ)$ h) $3\,E(-70^\circ)$

8. Gib die Zahlen z_1, z_2, $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$ und $z_1 \cdot z_2^*$ in Polarform an!

a) $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 1 + \sqrt{3}\,i$

b) $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1 + i)$, $z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1 - i)$.

9. Zeige: Für alle φ gilt:

a) $[E(\varphi)]^* = E(-\varphi)$

b) $\frac{1}{2}\,[E(\varphi) + E(-\varphi)] = \cos\varphi$

c) $\frac{1}{2\,i}\,[E(\varphi) - E(-\varphi)] = \sin\varphi$

10. Berechne den Winkel δ, um den man den Vektor z_1 im positiven Sinn drehen muß, bis er mit der Richtung von z_2 übereinstimmt:

a) $z_1 = 1 + i$; $z_2 = i$ b) $z_1 = i$; $z_2 = 1 + i$

c) $z_1 = 3 + 4\,i$; $z_2 = -4 + 3\,i$ d) $z_1 = -4 + 3\,i$; $z_2 = 3 + 4\,i$

e) $z_1 = \sqrt{3} + i$; $z_2 = i$ f) $z_1 = i$; $z_2 = \sqrt{3} + i$

11. Berechne die Winkel, welche die Dreiecke der Aufgabe 2 an der Ecke z_1 aufweisen! Anleitung: Zeige zunächst, daß die in der Ecke z_1 aneinanderstoßenden Dreiecksseiten die Vektoren $z_2 - z_1$ und $z_3 - z_1$ darstellen. Berechne dann die Winkel zwischen diesen Vektoren!

12. Gib eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß die Vektoren $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + i\,y_2$

a) gleiche Richtung b) entgegengesetzte Richtung haben

c) orthogonal sind!

13. Ein Flugzeug fliegt 10 km nach Norden, dann 10 km nach Nordosten, 10 km nach Nordwesten und 10 km nach Osten. Stelle den Flugweg durch eine Summe komplexer Zahlen dar und berechne die Entfernung, die das Flugzeug schließlich vom Ausgangspunkt hat!

14. Es sei $z = |z|\,E(\varphi)$ eine Polarform. Warum ist dann $z^{-1} = |z|^{-1}\,E(-\varphi)$ keine Polarform? Wie lautet die Polarform von z^{-1}?

15. *Assoziativität des Produktes:* Es seien $z_\nu = |z_\nu|\,E(\varphi_\nu)$ $(\nu = 1, 2, 3)$ drei komplexe Zahlen in Polarform. Schreibe die Produkte $(z_1 z_2) \cdot z_3$ und $z_1 (z_2 \cdot z_3)$ an und zeige auf diese Weise die Gültigkeit der Assoziativität.

16. a) Vereinfache $\text{Re}\,[E(60^\circ) : E(45^\circ)]$ und $\text{Im}\,[E(60^\circ) : E(45^\circ)]$!

b) Drücke $\cos 15^\circ$ und $\sin 15^\circ$ in exakter Form aus!

17. Nach der Moivreschen Formel ist

$$(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) = E(2\varphi) = [E(\varphi)]^2 = (\cos\varphi + i \sin\varphi)^2 = (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + i\,2 \sin\varphi \cos\varphi$$

Durch Vergleich der Realteile und der Imaginärteile folgt

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \quad \text{und} \quad \sin 2\varphi = 2 \sin\varphi \cos\varphi.$$

Stelle durch eine ähnliche Rechnung eine Formel für $\cos 3\varphi$ und für $\sin 3\varphi$ auf!