Protokoll vom 1. März 2010

Vergleich der Hausaufgabe

$\vec{n} = r \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$P(3r / -r / 5r) \in E$?

$3 \cdot 3r - (-r) + 5 \cdot 5r = 105$

$\Leftrightarrow \quad 9r + r + 25r = 105$

$\Leftrightarrow \quad 35r = 105 \quad |:35$

$\Leftrightarrow \quad r = 3$

Abstandsberechnungen

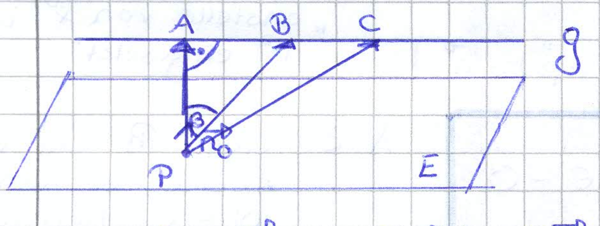
Hessesche Normalenform

Aufgabe: gegeben ist eine Ebene mit Normalenvektor $\vec{n_0}$ $(|\vec{n_0}| = 1)$

Einschub: Lage des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 5^2}$

$= \sqrt{35}$

$\vec{n_0} = \frac{1}{\sqrt{35}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$



$g \parallel E$

$\vec{n_0} \cdot \vec{PA} = |\vec{n_0}| \cdot |\vec{PA}| \cdot \cos 0°$

$= |\vec{PA}|$

$\vec{n_0} \cdot |\vec{PB}| = |\vec{n_0}| \cdot |\vec{PB}| \cdot \cos\beta$

$= |\vec{PA}|$

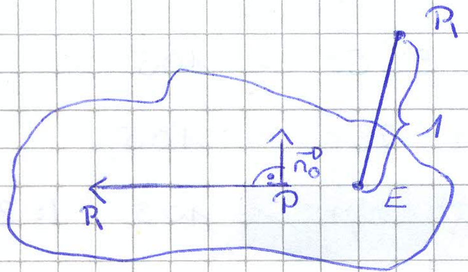
$\vec{n_0} \cdot |\vec{PC}| = |\vec{PA}|$

$\measuredangle$ dazu: $\cos\beta = \frac{|\vec{PA}|}{|\vec{PB}|}$

$\Leftrightarrow |\vec{PA}| = \cos\beta \cdot |\vec{PB}|$

Was können wir damit anfangen?

$\Rightarrow$ Wir können hiermit den Abstand eines beliebigen Punktes R von einer Ebene E bestimmen.



Definition: Eine Ebenengleichung der Form

$$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0} = 0$$

mit $|\vec{n_0}| = 1$ heißt

Hessesche Normalenform

Satz: Ist $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0} = 0$ die Hessesche Normalenform einer Ebene E, so lässt sich der Abstand d eines Punktes R mit dem Ortsvektor $\vec{r}$ zur Ebene E bestimmen,

es ist $d = |(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0}|$

„anstelle von $\vec{x}$ wird $\vec{r}$ eingesetzt"

N.B. Liegt R auf der Ebene, so kommt $d = 0$ heraus

Beispiel: $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 6 = 0$

$R(1|1|1)$

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{x} - 6 = 0$$

$$\vec{n} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$E: \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{x} = 2$$

Setze $\vec{r}$ in E ein:

$$d = \left| \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \right| \Leftrightarrow \left| \frac{1}{3} (2 - 1 + 2) - 2 \right|$$

$$= |1 - 2|$$

$$= 1$$