

M13: Komplexe Zahlen 3

Kreisgleichung

1. Beschreibe folgende Kreise (Angabe von Mittelpunkt und Radius):
 a) $\{z \mid |z - 1| = 3\}$ b) $\{z \mid |z + 1| = 1\}$ c) $\{z \mid |z + 1 - i| = 5\}$

2. Überführe die folgenden Kreisgleichungen von der Form $|z - m| = r$ in die Form $zz^* - m^*z - mz^* + \gamma = 0$!

Beispiel: $|z - i| = 5 \Leftrightarrow |z - i|^2 = 25 \Leftrightarrow (z - i)(z - i)^* = 25 \Leftrightarrow$
 $(z - i)(z^* + i) = 25 \Leftrightarrow zz^* + iz - iz^* - 24 = 0$
 a) $|z + i| = 5$ b) $|z + 1| = 1$
 c) $|z + 1 - i| = \sqrt{2}$ d) $|z - 2 + i| = 3$

3. Überführe die folgenden Kreisgleichungen von der Form $zz^* - m^*z - mz^* + \gamma = 0$ in die Form $|z - m| = r$!

Beispiel: $zz^* + iz - iz^* - 1 = 0$ Ergänzung von $mm^* = i(-i)$ auf beiden Seiten liefert:
 $zz^* + iz - iz^* + i(-i) - 1 = i(-i) \Leftrightarrow (z - i)(z^* + i) - 1 = 1 \Leftrightarrow$
 $(z - i)(z - i)^* = 2 \Leftrightarrow |z - i|^2 = 2 \Leftrightarrow |z - i| = \sqrt{2}$ (Mittelpunkt i , Radius $\sqrt{2}$).

- a) $zz^* - z - z^* - 24 = 0$ b) $zz^* - 2z - 2z^* - 5 = 0$
 c) $zz^* - iz + iz^* = 0$ d) $zz^* - (1 - i)z - (1 + i)z^* = 0$

4. Kreis des Apollonius

- a) Gesucht ist die Menge aller Punkte z der Zahlenebene, für die das Verhältnis ihrer Abstände von den festen Punkten $a = 3$ und $b = -3$ den festen Wert $2 : 1$ hat. Erläutere, daß diese Punktmenge wie folgt geschrieben werden kann:

$$\left\{z \mid \frac{|z - 3|}{|z + 3|} = 2\right\}$$

- b) Forme die Gleichung $\frac{|z - 3|}{|z + 3|} = 2$ äquivalent um in $zz^* + 5z + 5z^* + 9 = 0$!

- c) Zeige daß die Punktmenge auch in der Form $\{z \mid |z + 5| = 4\}$ geschrieben werden kann! Zeichne die gesuchte Punktmenge!

5. Bestimme folgende Punktmenge und zeichne sie!

- a) $\left\{z \mid \frac{|z - 6|}{|z|} = 2\right\}$ b) $\left\{z \mid \frac{|z - 1|}{|z + 1|} = 3\right\}$
 c) $\left\{z \mid \frac{|z - 1|}{|z + 1|} = 1\right\}$ d) $\left\{z \mid \frac{|z + i|}{|z + 1|} = 1\right\}$

Geradengleichung

6. Zeichne folgende Geraden:

- a) $\{z \mid -iz + iz^* + 1 = 0\}$ b) $\{z \mid (1 + i)z + (1 - i)z^* + 2 = 0\}$
 c) $\{z \mid (3 - i)z + (3 + i)z^* - 5 = 0\}$ d) $\{z \mid z + z^* - 3 = 0\}$

Anleitung: Setze $z = x + iy$ in die Geradengleichung ein. Dann entsteht eine in x und y lineare Gleichung, deren Graph die gesuchte Gerade ist.

7. Zeige, daß es sich bei folgenden Punktmenge um Geraden handelt und zeichne die Geraden:

- a) $\{z \mid \operatorname{Re}(z - 2) = 1\}$ b) $\{z \mid \operatorname{Re}(iz) = 1\}$
 c) $\{z \mid \operatorname{Re}((1 + i)z) = 2\}$ d) $\{z \mid \operatorname{Im}(iz) = 3\}$

Hinweis: Setze $z = x + iy$!

8. Entscheide, ob folgende Punkte auf der Geraden $\{z \mid \operatorname{Re}[(2 - i)z] = 3\}$ liegen:

- a) $z = 1 + i$, b) $z = 1 - i$, c) $z = 2 - i$, d) $z = 3 + 2i$

Parameterformen

17. Zeichne die Gerade g und den Punkt z_0 und entscheide, ob $z_0 \in g$!

- a) $g = \{z = i + (1 + i)t \mid -\infty < t < +\infty\}$, $z_0 = 0,5 + 1,5i$
 b) $g = \{z = 2 - i + (1 - i)t \mid -\infty < t < +\infty\}$; $z_0 = 4 - 3i$
 c) $g = \{z = 4 + (3 - i)t \mid -\infty < t < +\infty\}$; $z_0 = 7 - 0,5i$

18. Entscheide durch Rechnung, ob $z_0 \in g$ bzw. $z_0 \in s$ ist! Untersuche dazu, ob es einen Parameterwert t_0 gibt, so daß $z_0 = z(t_0)$ wird:

- a) $g = \{z = 3 + (1 - i)t \mid -\infty < t < +\infty\}$; $z_0 = 8 - 5i$
 b) $g = \{z = (1 + i) + it \mid -\infty < t < +\infty\}$; $z_0 = 2 + 3i$
 c) $s = \{z = i + (2 + i)t \mid 0 \leq t \leq 1\}$; $z_0 = 4 + 3i$

19. Bestimme eine Parameterform der Geraden durch z_0 und z_1 ! Mache dazu den Ansatz $z(t) = a + bt$ und bestimme a und b so, daß $z(0) = z_0$ und $z(1) = z_1$ wird:

- a) $z_0 = 1$, $z_1 = i$ b) $z_0 = 2 + i$, $z_1 = 1 - i$ c) $z_0 = 2 - i$, $z_1 = 3 + 2i$

20. Bestimme in $z(t) = a + bt$ den Anfangsvektor und den Richtungsvektor b so, daß $z(0) = z_0$ und $z(1) = z_1$ wird.

21. Bestimme den Mittelpunkt von z_0 und z_1 ! Benütze dabei das Ergebnis der Aufgabe 20.

der Strecke $\overline{z_0 z_1}$