STORMARNSCHULE AHRENSBURG

Ph13: Minkowski-Diagramme

12.2.6 Minkowski-Diagramme

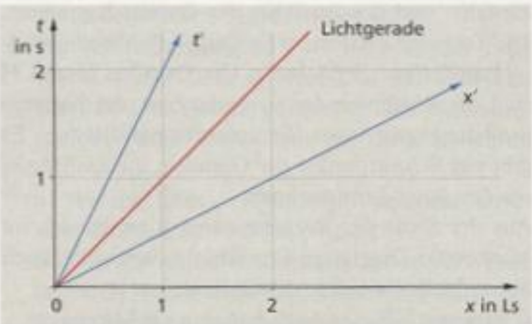
Zur Darstellung von Bewegungen entwickelte der deutsche Mathematiker HERMANN MINKOWSKI (1864–1909) ein geometrisches Modell. Die Einteilung der Achsen entspricht den Größenordnungen der Lichtgeschwindigkeit. Anders als in den üblichen Darstellungen von Zeit-Weg-Diagrammen wird hier die x-Achse als Raumkoordinate und die y-Achse als Zeitkoordinate verwendet (Abb. 435.2).

Die Achseneinteilung wird so gewählt, dass einer Sekunde auf der Zeitachse gerade eine Lichtsekunde (Ls) auf der Ortsachse entspricht. Dabei gilt $1\ \text{Ls} = c \cdot 1\ \text{s} \approx 3 \cdot 10^8\ \text{m}$. Mit dieser Einteilung beschreibt die Winkelhalbierende der Achsen die Ausbreitung des Lichts im System S. Sie wird **Lichtgerade** genannt.

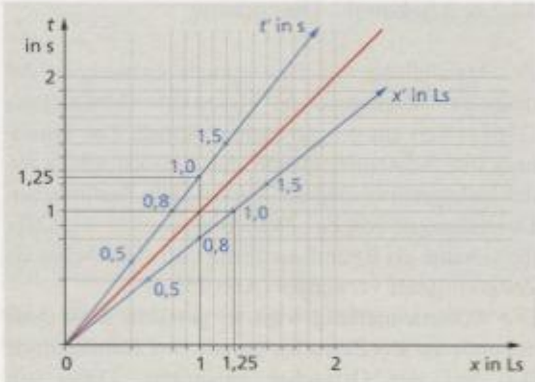
Bewegt sich nun das zweite Inertialsystem S' gegenüber S mit einer Geschwindigkeit v, dann wird die Bewegung des Koordinatenursprungs von S' im System S zur neuen Zeitachse t'. Auch im System S' gilt das Einstein'sche Postulat zur Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Daher muss bei entsprechender Achseneinteilung auch hier die Lichtgerade die Winkelhalbierende des Koordinatensystems darstellen. Deswegen ergibt sich analog zum System S die x'-Achse als Spiegelung der t'-Achse an der Lichtgeraden.

Mithilfe der Längenkontraktion lässt sich die Achseneinteilung der Minkowski-Diagramme für zwei zueinander bewegte Inertialsysteme einführen. Bei einer Geschwindigkeit von $0{,}6\,c$ beträgt der Lorentzfaktor $k = 1{,}25$, d. h. eine Länge von 1 Ls im System S entspricht einer Länge von $1/1{,}25$ Ls $= 0{,}8$ Ls im System S'.

Aufgrund des Relativitätsprinzips, also der Gleichberechtigung der Bezugssysteme, entspricht auch 1 Ls in S' einer Länge von 1,25 Ls in S. Eine Parallele zur Zeitachse durch den Punkt $(0, k)$ im System S liefert den Einheitsmaßstab für das System S' (Abb. 436.1).



435.2 Lage der Koordinatenachsen zweier zueinander bewegter Inertialsysteme



436.1 Konstruktion eines Maßstabs im Minkowski-Diagramm

Bei der Betrachtung von gleichzeitigen Ereignissen am gleichen Ort im System S' ergibt sich auch der Maßstab der Zeitachse. Durch diese Konstruktion ist es möglich, für ein beliebiges Ereignis die Orts- und Zeitkoordinaten bezüglich beider Systeme anzugeben. Dies zeigt auch das folgende Beispiel.

Quelle: Cornelsen Physik Oberstufe (ISBN 978-3-06-013006-1)

Minkowski-Diagramme

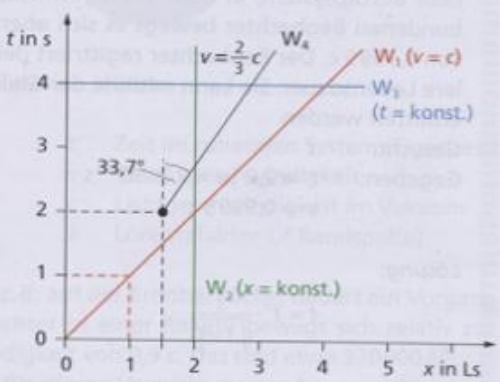
Nach den Erkenntnissen der speziellen Relativitätstheorie bilden Raum und Zeit bei der Beschreibung physikalischer Vorgänge eine Einheit.
Für diese einsteinsche Auffassung von Raum und Zeit entwickelte der deutsche Mathematiker HERMANN MINKOWSKI (1864–1909) ein mathematisch-geometrisches Modell, **vierdimensionale Raum-Zeit** oder **Minkowski-Welt** genannt.

Der seit 1902 in Göttingen tätige MINKOWSKI gab damit der speziellen Relativitätstheorie ihre mathematische Gestalt. Grundlage ist die Darstellung von Ereignissen in einem vierdimensionalen Koordinatensystem mit den drei Raumkoordinaten x, y, und z sowie einer Zeitkoordinate t. Bei einer Beschränkung von Bewegungen in Richtung der x-Achse sind y und z null, brauchen damit nicht berücksichtigt zu werden. Damit erhält man grafische Darstellungen in einem Zeit-Ort-Diagramm (t-x-Diagramm), das gut überschaubar ist. In einem solchen **Minkowski-Diagramm** werden Ereignisse als Punkte mit den Koordinaten (t, x) dargestellt. Die Menge der Ereignisse bildet im Minkowski-Diagramm eine **Weltlinie** (↗ Abb.). Jeder Punkt der Weltlinie entspricht einem bestimmten Ort x zu einem bestimmten Zeitpunkt t. Er wird auch als **Weltpunkt** bezeichnet.

Betrachtet man z.B. die Bewegung eines Körpers als Ereignis, so ist die Weltlinie eine Gerade, wenn die Bewegung gleichförmig ist. Bei einer beschleunigten Bewegung erhält man eine gekrümmte Weltlinie.
Darüber hinaus ermöglicht es ein Minkowski-Diagramm, Ereignisse aus der Sicht zweier Beobachter in zueinander bewegten Systemen S und S' in einem Zeit-Ort-Diagramm darzustellen.
Mithilfe von Minkowski-Diagrammen können die Lorentz-Transformationsgleichungen und einige wesentliche Folgerungen aus der relativistischen Kinematik (Gleichzeitigkeit von Ereignissen, Längenkontraktion, Zeitdilatation) geometrisch veranschaulicht werden. Bei der Arbeit mit Minkowski-Diagrammen ist es sinnvoll, sich an die allgemein üblichen Vereinbarungen für diese Diagramme zu halten.

Diese aus Zweckmäßigkeitsgründen getroffenen Vereinbarungen lauten:
- Als Einheit für die Zeitachse t wird die Sekunde verwendet.
- Als Einheit für die Ortsachse x wird die Lichtsekunde (Abkürzung: Ls) genutzt. Das ist die Strecke, die Licht im Vakuum in einer Sekunde zurücklegt: $1\ \text{Ls} = 1\ \text{s} \cdot 300\,000\ \frac{\text{km}}{\text{s}} = 300\,000\ \text{km}$
- Bei der Achseneinteilung werden auf den beiden Achsen für die genannten Einheiten jeweils die gleichen Strecken abgetragen. Wählt man z.B. für die t-Achse für eine Sekunde 1 cm, so ist auf der x-Achse für 1 Ls ebenfalls 1 cm zu wählen.

Mit diesen Festlegungen ergeben sich charakteristische Weltlinien, die nachfolgend genauer für ein Bezugssystem S beschrieben werden sollen.

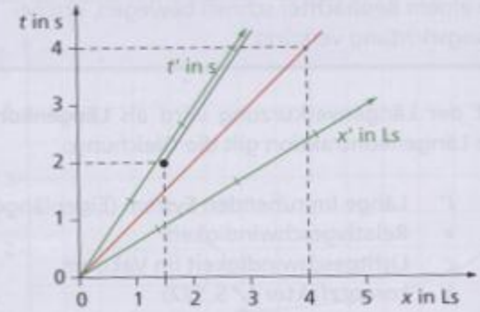


- W_1 ist eine Weltlinie eines Lichtsignals in Richtung positiver x-Achse. Der Neigungswinkel von 45° gegenüber der x-Achse ergibt sich aus der Wahl der Einheiten. Weltlinien mit einer Neigung kleiner als 45° kann es nicht geben, da die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum eine Grenzgeschwindigkeit ist.
- W_2 ist die Weltlinie von Ereignissen, die an einem Ort x (hier: $x = 2$ Ls) stattfinden. Sie werden auch ortsgleiche Ereignisse in S genannt. Das kann z.B. ein Körper sein, der an einer bestimmten Stelle in S ruht.
- W_3 ist die Weltlinie von Ereignissen, die zur gleichen Zeit (hier: $t = 4$ s) an verschiedenen Orten x im System S stattfinden. Sie werden auch zeitgleiche Ereignisse in S genannt.
- W_4 ist die Weltlinie von Ereignissen, die z.B. das Vorhandensein eines Körpers darstellen, der sich im System S in Richtung positiver x-Achse mit

einer konstanten Geschwindigkeit von $v = \frac{2}{3}c$ bewegt. Die Bewegung beginnt an dem markierten Punkt bei $x = 1{,}5$ Ls und $t = 2$ s. Bei der genannten Geschwindigkeit von $v = \frac{2}{3}c$ gilt für den Winkel zwischen t-Achse und der Weltlinie W_4 die Beziehung: $\tan\alpha = \frac{v}{c} = \frac{2}{3}$; $\alpha = 33{,}7°$

Man kann nun in relativ einfacher Weise für den Körper, der durch die Weltlinie W_4 dargestellt ist, das Bezugssystem S' mit den Koordinaten (x', t') konstruieren, in dem dieser Körper ruht. Dabei gehen wir davon aus, dass der Ursprung beider Koordinatensysteme zusammenfällt.

- Die t'-Achse muss parallel zur Weltlinie W_4 (↗S. 524) liegen. Dann ist zu jedem beliebigen Zeitpunkt x' = konstant, d.h., der Körper ruht in S'. Der Winkel zwischen den Zeitachsen t und t' ergibt sich dann analog wie der Winkel zwischen t-Achse und Weltlinie W_4 (oben) zu: $\tan\alpha = \frac{v}{c}$
- Die x'-Achse liegt symmetrisch zur Weltlinie W_1, da in jedem Inertialsystem, also auch in S', die Lichtgeschwindigkeit gleich groß ist.



Die Längeneinheiten für die Achseneinteilungen sind für jedes Inertialsystem in Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit verschieden.

Beträgt im System S diese Längeneinheit e, dann ergibt sich für ein dazu mit v bewegtes System S' als Längeneinheit e':

$$e' = e \cdot \sqrt{\frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2}}$$

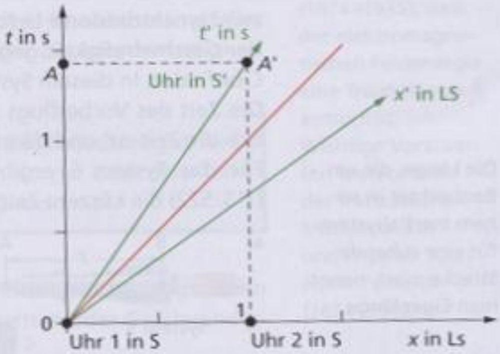
Mit $v = \frac{2}{3}c$ und $e = 1$ cm erhält man:

$$e' = 1\,\text{cm} \cdot \sqrt{\frac{c^2 + \frac{4}{9}c^2}{c^2 - \frac{4}{9}c^2}} = 1{,}61\,\text{cm}$$

Ist die Achseneinteilung bekannt, können für jedes Ereignis die Orts- und Zeitkoordinaten für das jeweilige Bezugssystem bestimmt bzw. aus dem Diagramm abgelesen werden. Darüber hinaus sind quantitative Aussagen zu Ereignissen möglich.

Zeitdilatation im Minkowski-Diagramm

Das System S' soll sich gegenüber dem System S mit $v = 0{,}7\,c$ bewegen. Mit $e = 1$ cm im System S kann man daraus e' und die Richtungen der Achsen x' und t' ermitteln: t' ist gegenüber t um den Winkel α geneigt. Mit $\tan\alpha = \frac{v}{c} = \frac{0{,}7\,c}{c}$ erhält man $\alpha = 35°$. Für die Achseneinteilung ergibt sich $e' = 1{,}71$ cm.

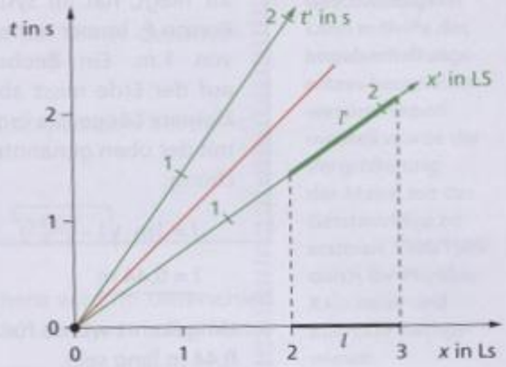


Ein Vorgang an einer Stelle in S' dauert $\Delta t' = 1$ s. Eine in S' im Koordinatenursprung ruhende Uhr zeigt gerade diese Zeitdauer von einer Sekunde an (Weltpunkt A'). Die Uhr hat sich in dieser Zeit an zwei in S ruhenden Uhren 1 und 2 vorbeibewegt. Die Zeitdauer wird, vom Koordinatenursprung bei 0 s beginnend, in S gemessen.

Aus dem Diagramm ergibt sich $\Delta t = 1{,}4$ s und damit $\Delta t > \Delta t'$.

Längenkontraktion im Minkowski-Diagramm

S' bewegt sich wiederum mit $v = 0{,}7\,c$ gegenüber S. Daraus ergeben sich die gleichen Neigungswinkel der Achsen und Achseneinheiten wie oben genannt. In seinem Ruhesystem S hat ein Maßstab die Länge $l = 1$ Ls. Im System S' (Diagramm unten) wird dann die Länge zu $l' = 0{,}7$ Ls bestimmt.



Quelle: Duden Lehrbuch Physik (ISBN-978-3-8355-3311-0)

Applet zu Minkowski-Diagrammen

http://www.geogebra.org/de/upload/files/dynamische_arbeitsblaetter/lwolf/srt/minkowski.html